

## 12. 1. REGUŁA MNOŻENIA I REGUŁA DODAWANIA

### Zasada mnożenia:

Jeżeli wybór polega na podjęciu kolejno  $k$  decyzji , przy czym pierwszą z nich można podjąć na  $n_1$  sposobów, drugą na  $n_2$  sposobów ,...,  $n$  –tą na  $n_k$  sposobów, to takiego wyboru można dokonać na  $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$  sposobów.

### Zasada dodawania:

Jeżeli wybór polega na podjęciu jednej z  $k$  decyzji , przy czym pierwszą z nich można podjąć na  $n_1$  sposobów, drugą na  $n_2$  sposobów ,...,  $n$  –tą na  $n_k$  sposobów, to takiego wyboru można dokonać na  $n_1 + n_2 + \dots + n_k$  sposobów.

Przykład 12.1.1. Piotr postanowił zjeść obiad na stołówce.

W menu mają do wyboru:

pierwsze danie: zupa pomidorowa , zupa fasolowa;

drugie danie: schabowy, mielone, pierogi.

deser: lody, szarlotka, budyń , krem.

Piotr zamierza zjeść pierwsze i drugie danie lub drugie danie i deser

Na ile sposobów może dokonać wyboru obiadu.

Rozwiązanie	Komentarz
<p>Piotr wybiera pierwsze i drugie danie:</p> <p>1 sposób: (z p) i (s) ,</p> <p>2 sposób: (z p) i (m),</p> <p>3 sposób: (z p) i (p) ,</p> <p>4 sposób: (z f) i (s) ,</p> <p>5 sposób: (z f) i (m),</p> <p>6 sposób: (z f) i (p) ,</p> <p>lub</p> <p>Piotr wybiera drugie danie i deser:</p> <p>7 sposób: (s) i (l)</p> <p>8 sposób: (s) i (sz)</p> <p>9 sposób: (s) i (b)</p> <p>10 sposób: (s) i (k)</p> <p>11 sposób: (m) i (l)</p> <p>12 sposób: (m) i (sz)</p> <p>13 sposób: (m) i (b)</p> <p>14 sposób: (m) i (k)</p> <p>15 sposób: (p) i (l)</p> <p>16 sposób: (p) i (sz)</p> <p>17 sposób: (p) i (b)</p> <p>18 sposób: (p) i (k)</p> <p><b>Odp.:</b> Piotr może wybrać swój obiad na 18 sposobów</p>	<p>Analizujemy zadanie poprzez wypisanie wszystkich możliwych sposobów wybrania obiadu przez Piotra .</p> <p>Dla ułatwienia zapisu wprowadźmy oznaczenia:</p> <p>(z p) – zupa pomidorowa,</p> <p>(z f) – zupa fasolowa ,</p> <p>(s)- schabowy,</p> <p>(m) – mielone,</p> <p>(p) – pierogi,</p> <p>( l) – lody</p> <p>(sz) – szarlotka</p> <p>(b) – budyń</p> <p>(k) - krem</p>

<p>Piotr może wybrać pierwsze <b>i</b> drugie danie na <math>2 \cdot 3 = 6</math> sposobów ( zgodnie z regułą mnożenia)</p> <p>Piotr może wybrać drugie danie <b>i</b> deser na <math>3 \cdot 4 = 12</math> sposobów ( zgodnie z regułą mnożenia)</p> <p>Piotr może wybrać pierwsze, drugie danie <b>lub</b> drugie danie, deser na <math>6 + 12 = 18</math> sposobów ( zgodnie z regułą dodawania)</p> <p>Rozwiązanie zadania możemy przedstawić za pomocą działania :  <math>2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 18</math></p>	<p>Zadanie możemy rozwiązać wykorzystując regułę mnożenia i regułę dodawania.</p>
--	---

Przykład 12.1.2. Zosia dojeżdża do szkoły . Może dojechać bezpośrednio metrem linii numer: 2,4,lub5 , albo może dojechać z przesiadką, najpierw autobusem numer 1,2 lub3, a następnie tramwajami numer 7 lub 8. Na ile sposobów Zosia może dojechać z domu do szkoły?

Rozwiązanie	Komentarz
<p>Zosia może jechać metrem:            1 sposób: m2            2 sposób: m4            3 sposób: m5            lub            może jechać z przesiadką autobusem i tramwajem:            4 sposób: a1 i t7            5 sposób: a1 i t8            6 sposób: a2 i t7            7 sposób: a2 i t8            8 sposób: a3 i t7            9 sposób: a3 i t8</p> <p><b>Odp.:</b> Zosia może dojechać do szkoły na 9 sposobów.</p>	<p>Analizujemy zadanie poprzez wypisanie wszystkich możliwych sposobów wybrania trasy dojazdu do szkoły Zosi.</p>
<p>Metro(trzy sposoby) <b>lub</b> autobus (trzy sposoby) <b>i</b> tramwaj ( dwa sposoby):  <math>3 + 3 \cdot 2 = 9</math></p>	<p>Zadanie możemy rozwiązać wykorzystując regułę mnożenia i regułę dodawania.</p>

Przykład 12.1.3. Na ile sposobów można ustawić w kolejce 5 osób ?

Rozwiązanie	Komentarz
<p><math>5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120</math></p> <p><b>Odp.:</b> Pięć osób można ustawić w kolejce na 120 sposobów.</p>	<p>Jest 5 osób i pięć miejsc w kolejce.            Pierwszą osobę można ustawić 5 sposobów, drugą na 4 sposoby, trzecią na 3 sposoby, czwarta na 2 sposoby, a piątą tylko na 1 sposób.</p>

Przykład 12.1.4. Ile jest liczb czterocyfrowych mniejszych od 4000 utworzonych z cyfr 1,2,3,4 w których cyfry się nie powtarzają ?

Rozwiązanie	Komentarz
$3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$  <b>Odp.:</b> Liczb czterocyfrowych mniejszych od 4000 utworzonych z cyfr 1,2,3,4 jest 18.	<p>Cyfrę tysięcy możemy wybrać na 3 sposoby (liczba czterocyfrowa utworzona z cyfr 1,2,3,4 mniejsza od 4000 nie może mieć cyfry tysięcy równej 4)</p> <p>Cyfrę setek możemy wybrać na 3 sposoby ( cyfry się nie powtarzają , a cyfrę tysięcy już wybraliśmy, więc pozostały nam trzy możliwości )</p> <p>Cyfrę dziesiątek możemy wybrać na 2 sposoby ( cyfrę tysięcy i cyfrę setek już wybraliśmy , więc pozostały nam dwie możliwości)</p> <p>Cyfrę jedności – jeden sposób</p>
1) 1234 2) 1243 3) 1324 4) 1342 5) 1423 6) 1432 7) 2134 8) 2143 9) 2314 10) 2341 11) 2413 12) 2431 13) 3124 14) 3142 15) 3214 16) 3241 17) 3421 18) 3412	<p>Liczb czterocyfrowych mniejszych od 4000 utworzonych z cyfr 1,2,3,4 jest niewiele, zatem możemy je wypisać.</p>

Przykład 12.1.5. Z urny zawierającej 4 kule (biała, czarna, niebieska, zielona) losujemy trzy kule. Ile jest możliwych losowań ?

Rozwiązanie	Komentarz
1) b, c ,n 2) b, c, z 3) b, n, z 4) c, n, z  <b>Odp.:</b> Kule można wylosować na 4 sposobów.	<p>Wypisujemy losowania.</p>

$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{24}{6} = 4$	<p>Liczbę sposobów losowań możemy obliczyć.  W urnie są 4 kule, zatem pierwszą kulę możemy wylosować na 4 sposoby, drugą na 3 sposoby, trzecią na 2 sposoby, czyli trzy kule na <math>4 \cdot 3 \cdot 2 = 24</math> sposoby.  Ale przy jednoczesnym losowaniu trzech kul nie jest ważna kolejność losowania kul, zatem otrzymany wynik musimy podzielić przez liczbę ustawień trzech kul: Pierwsza kulę można ustawić na 3 sposoby, drugą na 2 sposoby, a trzecią na 1 (<math>3 \cdot 2 \cdot 1 = 6</math>)</p>
--	---

**Przykład 12.1.6.** Podczas egzaminu student wybiera 4 pytania spośród 6. Na ile sposobów może to zrobić ?

Rozwiązanie	Komentarz
$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 15$ <p><b>Odp.:</b> Student może wybrać pytania na 15 sposobów.</p>	<p>Student pierwsze pytanie losuje z pośród 6, drugie spośród 5, trzecie spośród 4 i czwarte pytanie spośród 3. Zatem <math>6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360</math></p> <p>Kolejność losowania poszczególnych pytań nie jest istotna, dlatego otrzymany wynik musimy podzielić przez liczbę ustawień czterech pytań: <math>4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24</math></p>

**Przykład 12.1.7.** Na ile sposobów można wybrać trzyosobowy samorząd ( przewodniczący, zastępca, skarbnik) z dwudziestoosobowej klasy?

Rozwiązanie	Komentarz
$20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$ <p><b>Odp.:</b> Samorząd klasowy można wybrać na 6840 sposobów.</p>	<p>Najpierw wybieramy przewodniczącego, można go wybrać na 20 sposobów. Później zastępcę na 19 sposobów, a następnie skarbnika na 18 sposobów.</p>

**Przykład 12.1.8.** Na ile sposobów można wybrać trzyosobową delegację z dwudziestoosobowej klasy ?

Rozwiązanie	Komentarz
$\frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1140$ <p><b>Odp.:</b> Delegację można wybrać na 1140 sposobów.</p>	<p>Przy wyborze delegacji nie jest ważna kolejność wyboru, dlatego wynik <math>20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840</math> musimy podzielić przez liczbę ustawień trzech osób: <math>3 \cdot 2 \cdot 1 = 6</math></p>

Przykład 12.1.9. Dziesięcioro osób przesłało sobie listownie życzenia świąteczne.  
Ile przesłano listów ?

Rozwiązanie	Komentarz
$10 \cdot 9 = 90$ <b>Odp.:</b> Przesłano 90 listów.	Każda z dziesięciu osób wysłała dziewięć listów .

Przykład 12.1.10. Spotkało się dziesięcioro przyjaciół i każdy z każdym przywitał się uściskiem dłoni. Ile było powitań ?

Rozwiązanie	Komentarz
$\frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45$ <b>Odp.:</b> Było 45 powitań.	Do uścisku musimy wybrać dwie osoby. Pierwszą wybieramy na 10 sposobów i drugą na 9 sposobów, czyli dwie osoby wybieramy na $10 \cdot 9 = 90$ sposobów. Ale przy uścisku dłoni nie jest ważna kolejność wyboru , dlatego otrzymany wynik dzielimy przez liczbę ustawień dwóch osób : $2 \cdot 1 = 2$

## ĆWICZENIA

Ćwiczenie 12.1.1. (1pkt.) Ile jest liczb pięciocyfrowych utworzonych z cyfr 0, 1, 2, 3, 4, jeśli cyfry nie mogą się powtarzać ?

### schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie ilości cyfr pięciocyfrowych utworzonych z cyfr 0, 1, 2, 3, 4.	1

Ćwiczenie 12.1.2. (1pkt.) Do windy zatrzymującej się na 10 piętrach wsiadły 4 osoby.  
Na ile sposobów osoby te mogą opuścić windę, jeśli każda z nich wysiadła na innym piętrze.

### schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie na ile sposobów osoby mogą wysiąść z windy.	1

Ćwiczenie 12.1.3. (1pkt.) Do 3 szuflad wrzucamy 9 kul. Na ile sposobów można rozmieścić te kule ( kule i szuflady rozróżniamy) ?

**schemat oceniania**

<b>Numer odpowiedzi</b>	<b>Odpowiedź</b>	<b>Liczba punktów</b>
1	Podanie na ile sposobów można rozmieścić kule w szufladach.	1

Ćwiczenie 12.1.4. (3pkt.) Z talii 52 karty wylosowano 5 kart, wśród których są trzy asy. Na ile sposobów można dokonać takiego wyboru ?

**schemat oceniania**

<b>Numer odpowiedzi</b>	<b>Odpowiedź</b>	<b>Liczba punktów</b>
1	Podanie na ile sposobów można wybrać trzy asy.	1
2	Podanie na ile sposobów można wybrać pozostałe dwie karty.	1
3	Podanie na ile sposobów można wybrać 5 kart , wśród których są 3 asy.	1

Ćwiczenie 12.1.5. (2pkt.) Uczeń klasy językowej dokonuje wyboru języków obcych, przy czym musi wybrać dwa języki obowiązkowe spośród: j. angielskiego, j. niemieckiego i j. rosyjskiego oraz jeden lub dwa języki dodatkowe spośród : j. włoskiego, j. francuskiego, j. hiszpańskiego. Na ile sposobów można dokonać wyboru.

**schemat oceniania**

<b>Numer odpowiedzi</b>	<b>Odpowiedź</b>	<b>Liczba punktów</b>
1	Podanie na ile sposobów uczeń może wybrać języki obowiązkowe.	1
2	Podanie na ile sposobów uczeń może dokonać wyboru wszystkich języków.	1